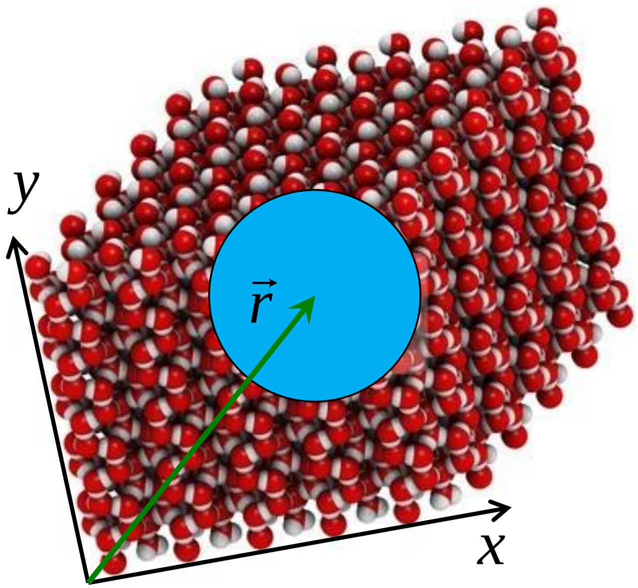
Opakování - Mechanika kontinua



• Představu spojitého prostředí **kontinua** zavádíme pro popis pohybu plynů, kapalin a pro vyšetřování mechanických dějů, při nichž se mění vzájemná vzdálenost jednotlivých bodů pevné látky.

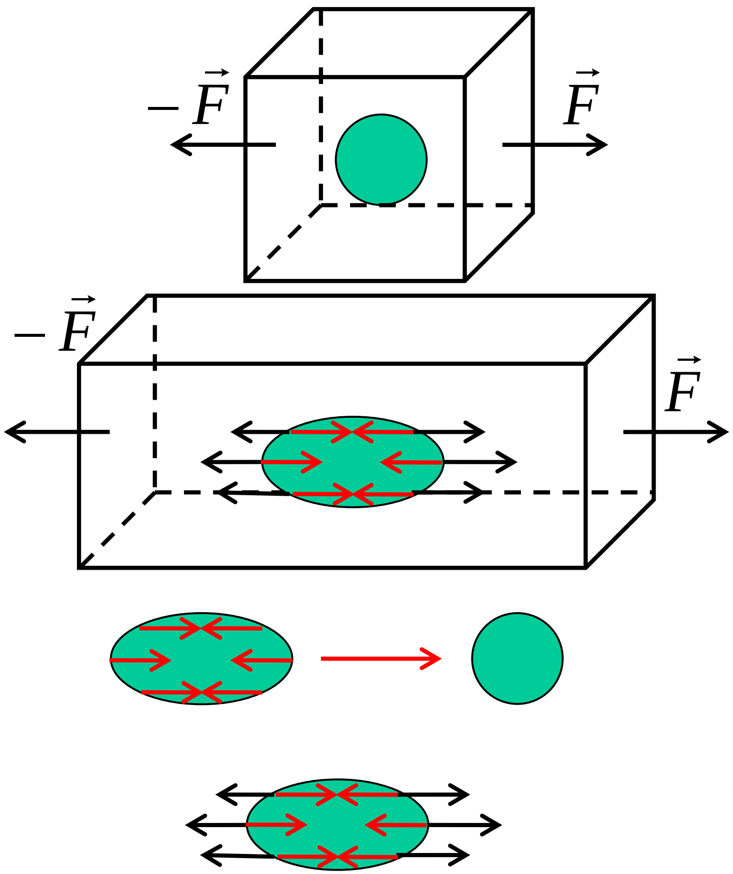
• Struktura pevných látek neodpovídá představě spojitého prostředí, přesto lze makroskopický popis pohybu kapalin a plynů, stejně jako deformační chování pevných látek na základě této představy dobře popsat.

• Fyzikální veličiny chápeme jako průměrné hodnoty z tak velkého okolí bodu, aby se v tomto okolí již neprojevovala nespojitá struktura látky.

• Síly v kontinuu lze podle jejich působení rozdělit na objemové a plošné. **Objemové síly** působí současně na všechny částice (elementy) kontinua. Typickou objemovou silou je síla tíhová.

• **Plošné síly** působí na povrch vyšetřované části kontinua a mají za následek obecně deformaci kontinua.

Opakování - Mechanika kontinua – napětí a deformace



• Plošné síly např. tahová síla působící na kontinuum v jednom směru vede obecně k **deformaci kontinua**.

•Při této deformaci kontinua dojde tedy ke změně rovnovážné polohy částic, což má za následek vznik sil mezi částicemi – tedy vznik **napětí**, které se snaží kontinuum vrátit do původního stavu. Po ustavení rovnováhy mluvíme o stavu napjatosti.

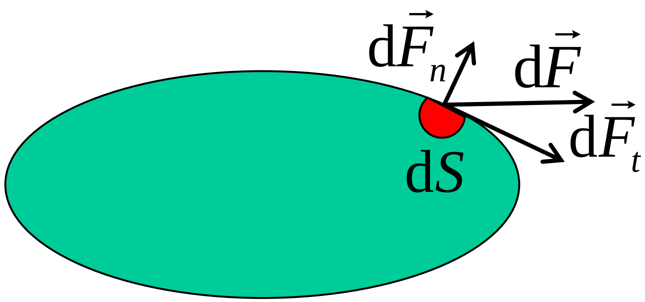
• Pokud tento elipsoid vzniklý deformací vyjmeme z kontinua, nabude původního tvaru.

• Tvar elipsoidu bychom zachovali, pokud bychom na něj působili stejnými silami, jako na něj působilo jeho okolí, když byl v kontinuu. Lze tak nahradit vnitřní působení okolí na vyšetřovanou část kontinua působením vnějším, které je možno kvantitativně vyjádřit.

• Síly jsou rozděleny po ploše vyšetřované části kontinua a podílem:

$$\vec{\sigma} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}S}$$

Opakování - Mechanika kontinua – napětí a deformace



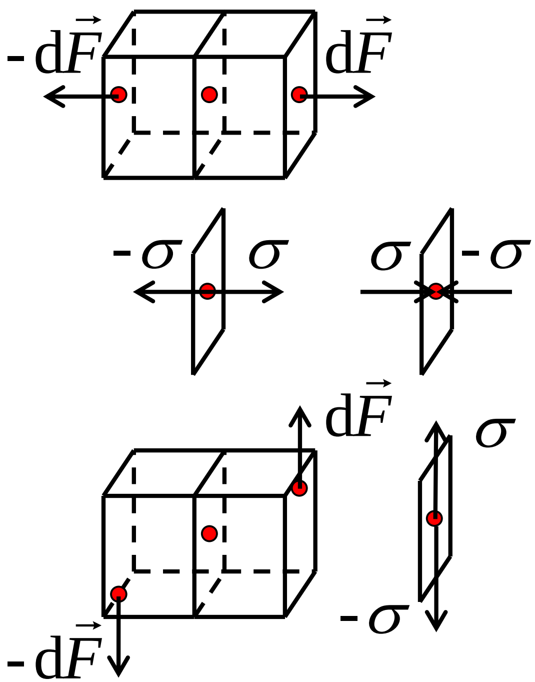
- Elementární síla může působit v obecném směru vzhledem k normále příslušného elementu plochy.
- Podílem působící elementání síly a elementu plochy můžeme zavést pojem napětí:

$$\vec{\sigma} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}S}$$

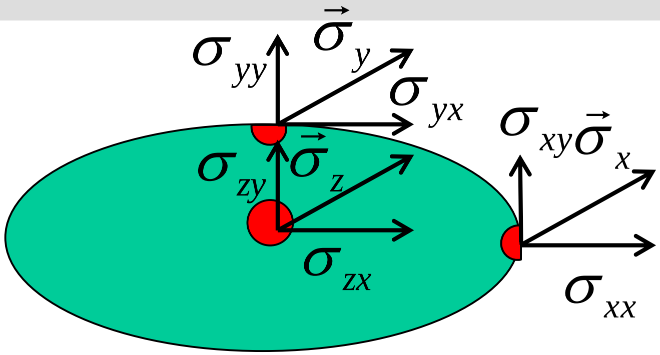
- Jednotkou napětí je pascal (Pa), tedy Nm^{-2}.
- Napětí můžeme pomocí normálové a tečné složky elementární síly rozdělit na normálovou a tečnou složku napětí:

$$\vec{\sigma}_n = \frac{\mathrm{d}\vec{F}_n}{\mathrm{d}S}, \quad \vec{\sigma}_t = \frac{\mathrm{d}\vec{F}_t}{\mathrm{d}S}$$

- **Normálové napětí** má charakter **tahu nebo tlaku** na plošce dS dvou částí kontinua.
- **Tečné napětí** způsobuje změnu tvaru jednotlivých elementů namáhaného kontinua a má charakter **čistého smyku**.



Mechanika kontinua – napětí a deformace



- Napětí může působit v obecném směru vzhledem k normále příslušného elementu plochy.
- Napěťový vektor působící na plochu kolmou k ose *x* je dán:

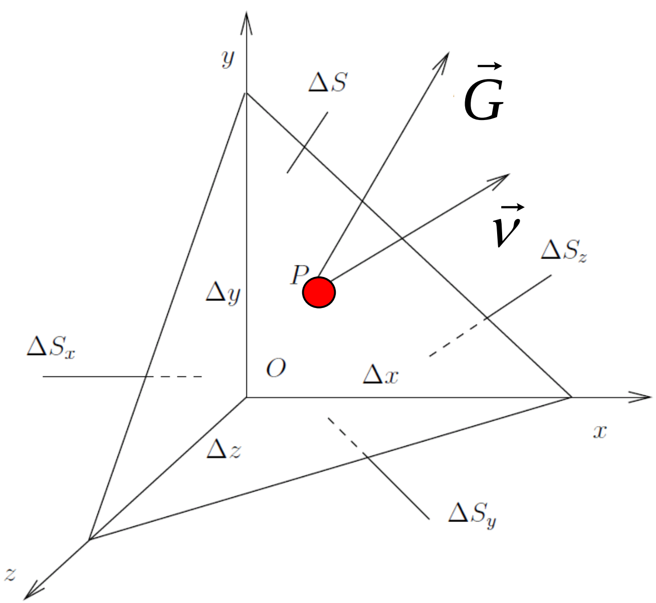
$$\vec{\sigma}_x = \left(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}\right)$$

- Napěťový vektor působící na plochu kolmou k ose *y* je dán:

$$\vec{\sigma}_y = \left(\sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}\right)$$

- Napěťový vektor působící na plochu kolmou k ose *z* je dán:

$$\vec{\sigma}_z = \left(\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}\right)$$



- Lze pomocí těchto údajů určit vektor napětí náležející libovolně orientované plošce ΔS procházející bodem *P*, vůči kterému jsme napětí určili?

- Předpokládejme, že je čtyřstěn v rovnováze, tj.:

$$\vec{\sigma}_v \Delta S - \vec{\sigma}_x \Delta S_x - \vec{\sigma}_y \Delta S_y - \vec{\sigma}_z \Delta S_z + \Delta V \vec{G} = 0$$

$$kde \quad \vec{G} = \lim_{V \to 0} \frac{\vec{F}}{V}$$

Mechanika kontinua – napětí a deformace

• Uvážímeli objem čtyřstěnu a průměty plochy Δ*S* do příslušných rovin kolmých k souřadnicovým osám:

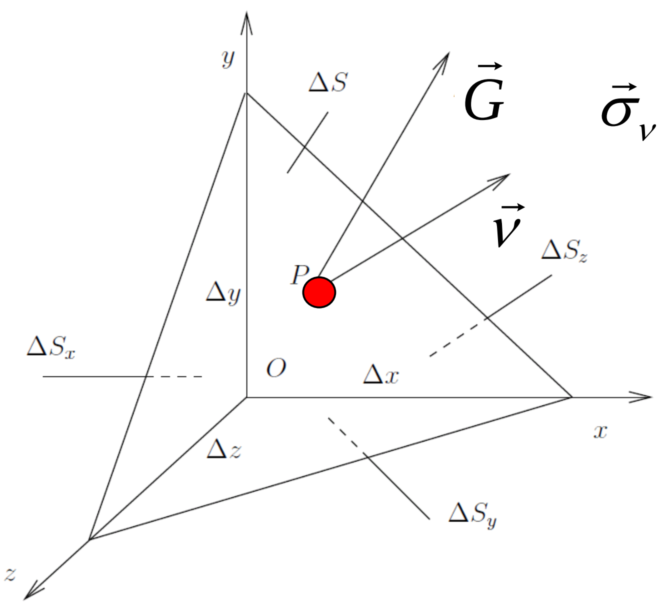
$$\Delta V = \Delta S\, h / 3$$

$$\Delta S_x = \nu_x \Delta S, \quad \Delta S_y = \nu_y \Delta S, \quad \Delta S_z = \nu_z \Delta S,$$

• Dostaneme:

$$\vec{\sigma}_\nu \Delta S - \vec{\sigma}_x \nu_x \Delta S - \vec{\sigma}_y \nu_y \Delta S - \vec{\sigma}_z \nu_z \Delta S + \Delta S\, h \vec{G} / 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\sigma}_\nu - \vec{\sigma}_x \nu_x - \vec{\sigma}_y \nu_y - \vec{\sigma}_z \nu_z + h\vec{G} / 3 = 0$$



• Jelikož výška čtyřstěnu *h* konverguje k nule:

$$\vec{\sigma}_\nu = \vec{\sigma}_x \nu_x + \vec{\sigma}_y \nu_y + \vec{\sigma}_z \nu_z \Rightarrow \sigma_{\nu i} = \sum_{j=x,y,z} \sigma_{ij} \nu_j, \quad i = x, y, z$$

• Kde jsme zavedli **tenzor napětí**:

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

• Z rovnováhy výsledného momentu sil plyne: $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$

Mechanika kontinua – napětí a deformace

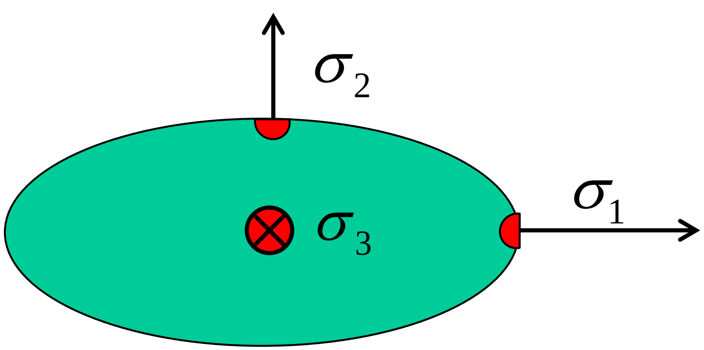
• Tenzor napětí můžeme uvést do hlavních os analogicky jako u tenzoru momentu setrvačnosti.

• Soustavu souřadnou lze zvolit tedy tak, aby složky tenzoru napětí se smíšenými indexy byly rovny nule. Vektor napětí musí tedy být úměrný normálovému vektoru:

$$\vec{\sigma}_\nu = \sigma\vec{\nu}, \quad tedy \quad \sigma_{\nu i} = \sigma\nu_i \quad \Rightarrow \quad \sigma\nu_i = \sum_{j=x,y,z} \sigma_{ij}\nu_j, \quad kde \quad i = x, y, z$$

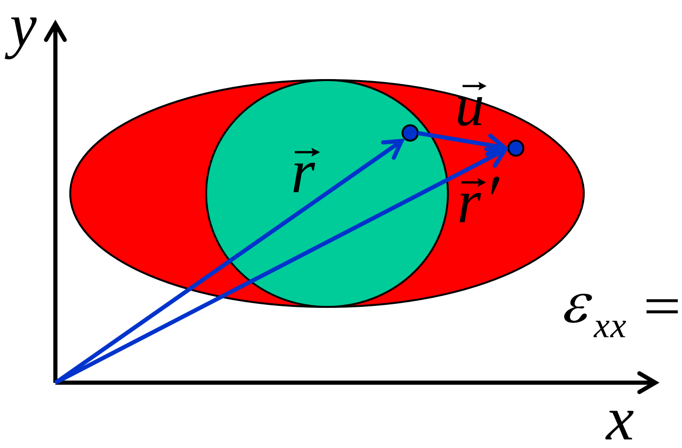
• Soustavu rovnic rozepíšeme:

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx}-\sigma)\nu_x + \quad \sigma_{xy}\nu_y + \quad \sigma_{xz}\nu_z &= 0 \\ \sigma_{xy}\nu_x + \quad (\sigma_{yy}-\sigma)\nu_y + \quad \sigma_{yz}\nu_z &= 0 \\ \sigma_{xz}\nu_x + \quad \sigma_{yz}\nu_y + \quad (\sigma_{zz}-\sigma)\nu_z &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \sigma_{xx}-\sigma & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{xx}-\sigma & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{xx}-\sigma \end{vmatrix} = 0$$



• Existují tři navzájem kolmé směry v nichž je rovnice splněna. Proložíme-li těmito směry (**hlavní směry napětí**) osy kartézské soustavy souřadné, budou napětí na plochách kolmých k osám souřadnic (**hlavní roviny napětí**) čistá tlaková nebo tahová napětí.Tato tři normálová napětí se nazývají **hlavními napětími** - analogie s hlavními momenty setrvačnosti.

Mechanika kontinua – napětí a deformace

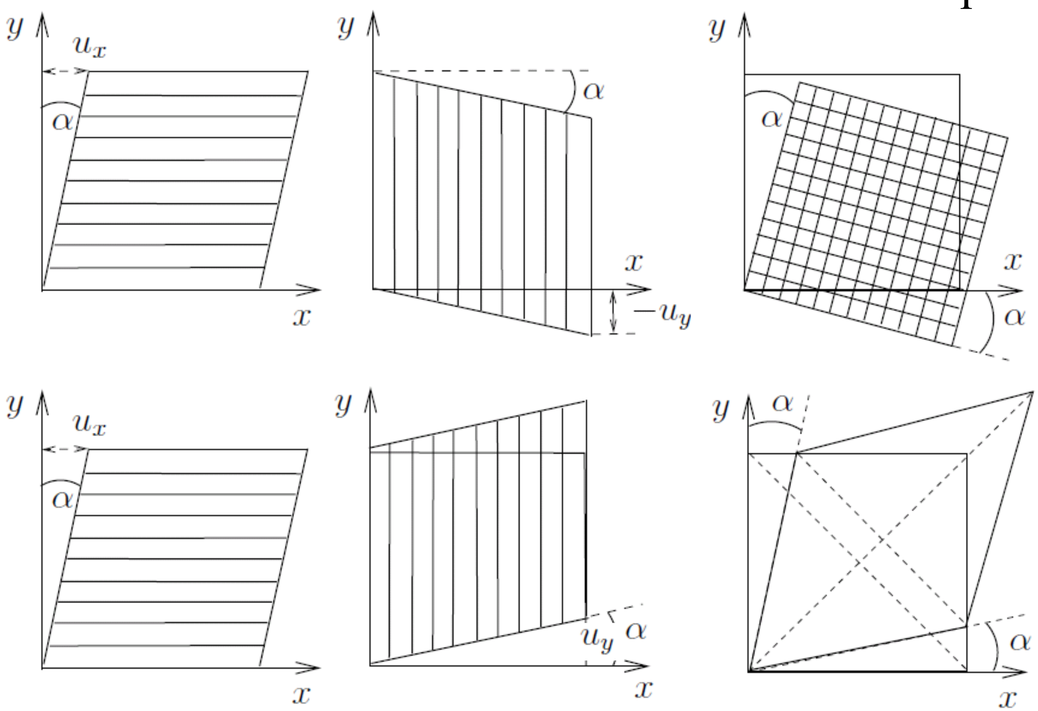


• Vektor posunutí je závislý na souřadnicích, může se od místa k místu měnit: $\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}$

• Změníme-li polohový vektor podél osy x o element dx změní se posunutí o du_x. Takovou deformaci ve směru osy x označíme:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \doteq \frac{l_x - l_{x0}}{l_{x0}},\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \doteq \frac{l_y - l_{y0}}{l_{y0}},\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \doteq \frac{l_z - l_{z0}}{l_{z0}}$$

• Deformace způsobené smykovými napětími :



$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i}\right), \quad i, j = x, y, z$$

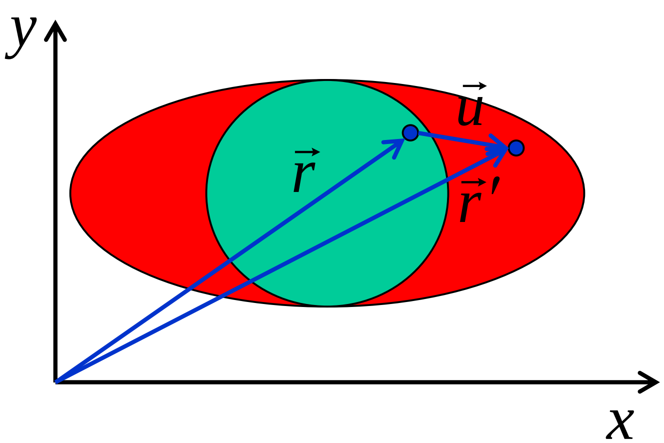
• Deformace nevznikne:

$$tg\alpha \doteq \alpha_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y},\ tg\alpha \doteq \alpha_{xy} = -\frac{\partial u_y}{\partial x}$$

• Deformace vznikne:

$$tg\alpha \doteq \alpha_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad tg\alpha \doteq \alpha_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

Mechanika kontinua – napětí a deformace



• deformace způsobená smykovými napětími je dána úhlem smyku:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i}\right) = \alpha_{ij}, \quad i, j = x, y, z$$

• Deformaci nazýváme homogenní, pokud jsou složky vektoru posunutí přímo úměrné souřadnicím:

$$u_x = \varepsilon_{xx}x + \varepsilon_{xy}y + \varepsilon_{xz}z$$
$$u_y = \varepsilon_{yx}x + \varepsilon_{yy}y + \varepsilon_{yz}z$$
$$u_z = \varepsilon_{zx}x + \varepsilon_{zy}y + \varepsilon_{zz}z$$

• Vztah mezi vektorem posunutí a polohovým vektorem je určen **tenzorem malých deformací**: $\vec{u} = \overleftrightarrow{\varepsilon}\vec{r}, \quad kde \quad \overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$

• Tenzor malých deformací je symetrický stejně jako tenzor napětí: $\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}$

Mechanika kontinua – napětí a deformace

- Závislost deformace na čase získáme derivací tenzoru malých deformací dle času:

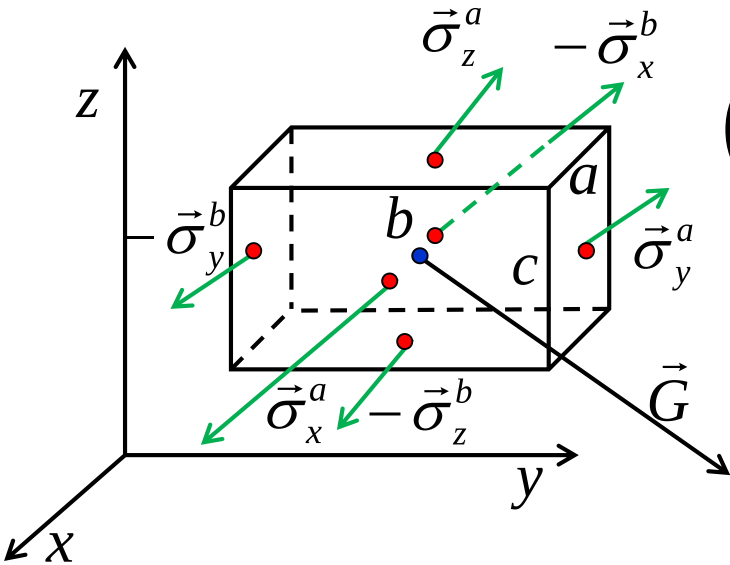
$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial t \partial i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial j} + \frac{\partial v_j}{\partial i}\right), \quad i, j = x, y, z$$

- Závislost deformace na čase je tedy také tenzorová veličina **- tenzor rychlosti deformace** :

$$D_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial j} + \frac{\partial v_j}{\partial i}\right), \quad i, j = x, y, z$$

$$\overleftrightarrow{D} = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{pmatrix}$$

Mechanika kontinua – rovnice rovnováhy a pohybová rovnice kontinua



• Předpokládejme, že je kvádr v rovnováze, tj.:

$$\left(\vec{\sigma}_x^a - \vec{\sigma}_x^b\right)bc + \left(\vec{\sigma}_y^a - \vec{\sigma}_y^b\right)ac + \left(\vec{\sigma}_z^a - \vec{\sigma}_z^b\right)ab + abc\vec{G} = 0$$

$$kde \quad \vec{G} = \lim_{V \to 0} \frac{\vec{F}}{V}$$

• složky vektorů napětí vyjádříme pomocí složek tenzoru napětí, tj.:

$$\left(\sigma_{xx}^a - \sigma_{xx}^b\right)bc + \left(\sigma_{yx}^a - \sigma_{yx}^b\right)ac + \left(\sigma_{zx}^a - \sigma_{zx}^b\right)ab + abcG_x = 0$$

$$\left(\sigma_{xy}^a - \vec{\sigma}_{xy}^b\right)bc + \left(\sigma_{yy}^a - \vec{\sigma}_{yy}^b\right)ac + \left(\sigma_{zy}^a - \sigma_{zy}^b\right)ab + abcG_y = 0$$

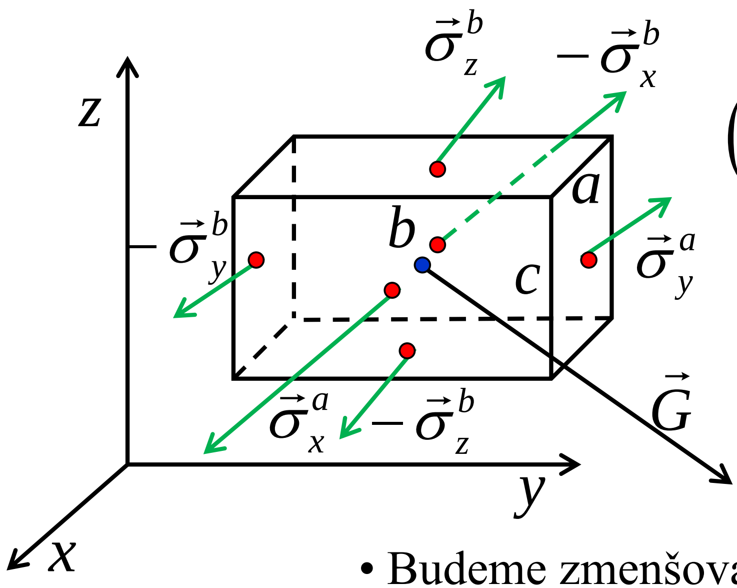
$$\left(\sigma_{xz}^a - \sigma_{xz}^b\right)bc + \left(\sigma_{yz}^a - \sigma_{yz}^b\right)ac + \left(\sigma_{zz}^a - \sigma_{zz}^b\right)ab + abcG_z = 0$$

$$\left(\sigma_{xx}^a - \sigma_{xx}^b\right) = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} a$$

$$\left(\sigma_{yx}^a - \sigma_{yx}^b\right) = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} b$$

$$\left(\sigma_{zx}^a - \sigma_{zx}^b\right) = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} c$$

Mechanika kontinua – rovnice rovnováhy a pohybová rovnice kontinua



• Předpokládejme, že je kvádr v rovnováze, tj.:

$$\left(\vec{\sigma}_x^a - \vec{\sigma}_x^b\right)bc + \left(\vec{\sigma}_y^a - \vec{\sigma}_y^b\right)ac + \left(\vec{\sigma}_z^a - \vec{\sigma}_z^b\right)ab + abc\vec{G} = 0$$

$$kde \quad \vec{G} = \lim_{V \to 0} \frac{\vec{F}}{V}$$

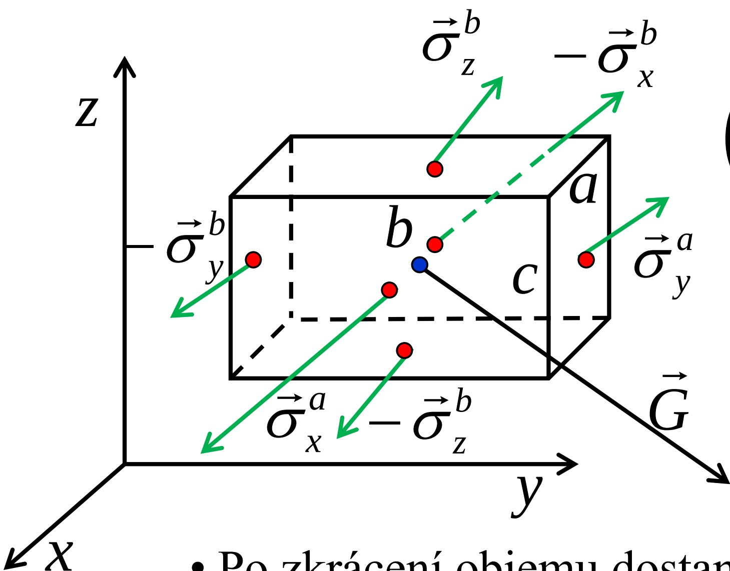
• Budeme zmenšovat objem kvádru k limitní hodnotě:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} abc + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} bac + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} cab + abcG_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} abc + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} bac + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} cab + abcG_y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} abc + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} bac + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} cab + abcG_z = 0$$

Mechanika kontinua – rovnice rovnováhy a pohybová rovnice kontinua



• Předpokládejme, že je kvádr v rovnováze, tj.:

$$\left(\vec{\sigma}_x^a - \vec{\sigma}_x^b\right)bc + \left(\vec{\sigma}_y^a - \vec{\sigma}_y^b\right)ac + \left(\vec{\sigma}_z^a - \vec{\sigma}_z^b\right)ab + abc\vec{G} = 0$$

$$kde \quad \vec{G} = \lim_{V \to 0} \frac{\vec{F}}{V}$$

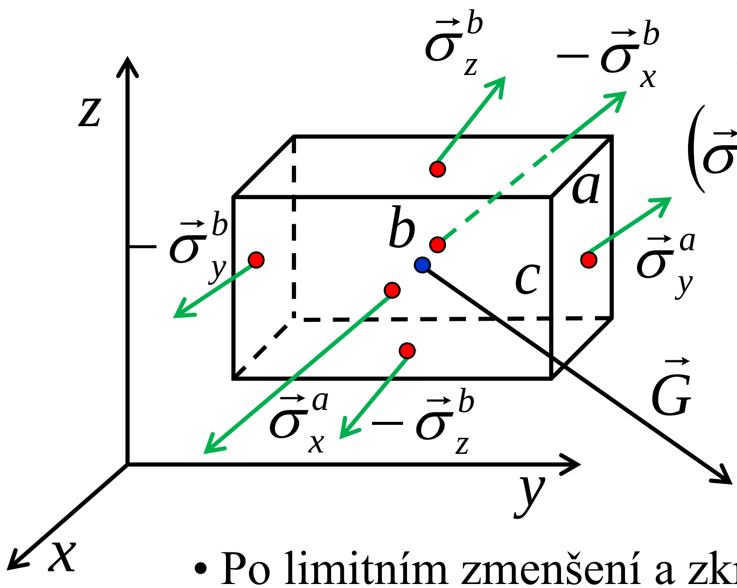
• Po zkrácení objemu dostaneme **rovnici rovnováhy kontinua**:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + G_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + G_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} + G_i = 0, \quad i = x, y, z$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + G_z = 0$$

Mechanika kontinua – rovnice rovnováhy a pohybová rovnice kontinua



- Pokud není kvádr v rovnováze, platí pohybová rovnice hmotného středu soustavy:

$$\left(\vec{\sigma}_x^a - \vec{\sigma}_x^b\right)bc + \left(\vec{\sigma}_y^a - \vec{\sigma}_y^b\right)ac + \left(\vec{\sigma}_z^a - \vec{\sigma}_z^b\right)ab + abc\vec{G} = M\vec{a}_T$$

- Hmotnost kvádru vyjádříme pomocí hustoty:

$$M = \rho V = \rho abc$$

- Při pohybu kontinua se v čase mění pouze konečná poloha $\vec{r}'$

$$\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}'}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{u}}{\mathrm{d}t^2}$$

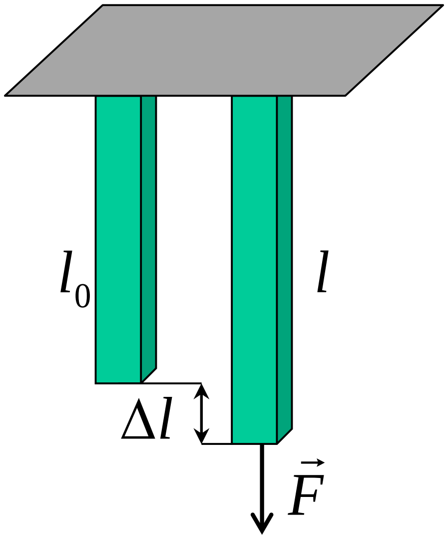
- Po limitním zmenšení a zkrácení objemu dostaneme **pohybovou rovnici kontinua**:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z} + G_x = \rho\frac{\mathrm{d}^2u_x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z} + G_y = \rho\frac{\mathrm{d}^2u_y}{\mathrm{d}t^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=x,y,z}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial j} + G_i = \rho\frac{\mathrm{d}^2u_i}{\mathrm{d}t^2}, \quad i = x, y, z$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + G_z = \rho\frac{\mathrm{d}^2u_z}{\mathrm{d}t^2}$$

Mechanika kontinua – deformace pevných látek, Hookeův zákon



• Úkolem nauky o deformaci pevných látek je zjistit kvantitativní vztah mezi deformacemi a napětími, které v tělesech budí vnější síly.

• Působíme-li silou na homogenní tyč o délce l_0, prodlouží se o:

$$\Delta l = l - l_0$$

• Bude-li mít tyč všude stejný průřez, bude všude stejné i normálové napětí:

$$\sigma_n = \frac{F}{S}$$

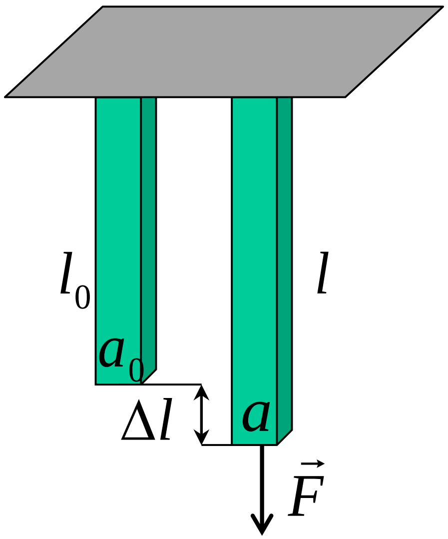
• Souvislost mezi deformací a napětím v tělese popsal poprvé Hooke, který formuloval výsledek svého pozorování větou: „Deformace je úměrná napětí materiálu.“ – **Hookeův zákon**:

$$\frac{\mathrm{d}l}{l} = k\,\mathrm{d}\sigma_n \quad \Rightarrow \quad \int_{l_0}^{l} \frac{\mathrm{d}l}{l} = k\int_{0}^{\sigma_n} \mathrm{d}\sigma_n \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{l}{l_0} = k\sigma_n \quad \Rightarrow \quad l = l_0 e^{k\sigma_n}$$

• Hookeův zákon platí pro oblast elastických deformací, kde deformace není trvalá. Poddajnost k popisující deformovatelnost tělesa je v případě mnoha látek malá a $k\sigma_n < 10^{-3}$, potom můžeme rozvinout exponenciálu do Taylorova rozvoje a dostaneme lineární závislost deformace na napětí:

$$e^{k\sigma_n} = 1 + k\sigma_n + \tfrac{1}{2}\left(k\sigma_n\right)^2 + \ldots \doteq 1 + k\sigma_n \Rightarrow l = l_0 e^{k\sigma_n} \doteq l_0\left(1 + k\sigma_n\right) \Rightarrow \frac{l - l_0}{l_0} = k\sigma_n$$

Mechanika kontinua – deformace pevných látek, Hookeův zákon



• Úkolem nauky o deformaci pevných látek je zjistit kvantitativní vztah mezi deformacemi a napětími, které v tělesech budí vnější síly.

• Poměr ε udává číselné prodloužení tyče jednotkové délky a nazývá se **relativní (poměrné) prodloužení**.:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = k\sigma_n = \frac{\sigma_n}{E}$$

kde E je **Youngův modul** neboli **modul pružnosti v tahu**.

• Při podélném namáhání tyče se průřez zmenšuje se zvětšujícím se zatížením. Prodloužení tyče vede tedy ke zkrácení strany a příčného řezu, můžeme tedy analogicky zavést **relativní (poměrné) příčné zkrácení** tyče:

$$\eta = \frac{a_0 - a}{a_0} = k_l \sigma_n$$

• kde k_l je příčná poddajnost. Dosadíme-li za normálové napětí z Hookova zákona dostaneme:

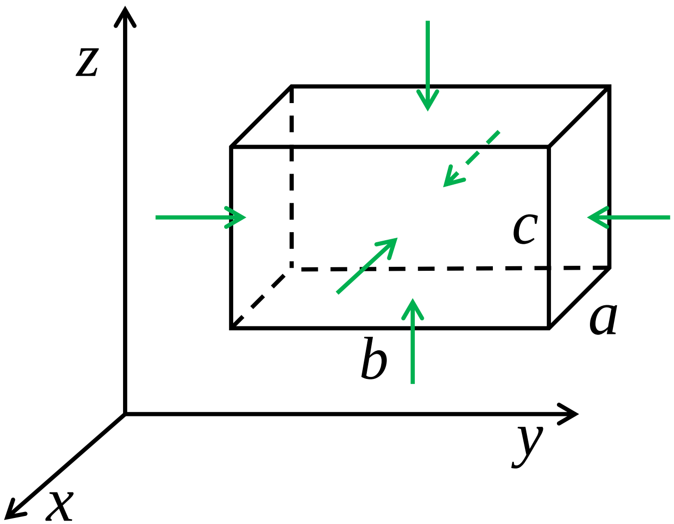
$$\eta = k_l \sigma_n = k_l E \varepsilon = \frac{1}{\mu_P}\varepsilon = \frac{1}{\mu_P E}\sigma_n$$

•**Poisonova konstanta** μ_P udává kolikrát je relativní prodloužení větší než příčné zkrácení.

• Pro rozměry deformované tyče můžeme tedy psát:

$$l = l_0(1+\varepsilon) = l_0\left(1 + \frac{\sigma_n}{E}\right), \quad a = a_0(1-\eta) = a_0\left(1 - \frac{\sigma_n}{\mu_P E}\right)$$

Mechanika kontinua – deformace pevných látek, Hookeův zákon



• Všechny dosud uvedené vztahy pro deformaci tyče platí i pro namáhání tlakem, jenom s tím rozdílem:

$$\varepsilon = \frac{l_0 - l}{l_0}, \quad \eta = \frac{a - a_0}{a_0}$$

• Vyšetříme deformaci tělesa (kvádru o stranách *a*, *b*, *c*), které je vystaveno všestrannému kolmému (hydrostatickému) tlaku:

$$x: a = a_0(1-\varepsilon) \qquad y: a = a_0(1+\eta) \qquad z: a = a_0(1+\eta)$$

$$b = b_0(1+\eta) \qquad b = b_0(1-\varepsilon) \qquad b = b_0(1+\eta)$$

$$c = c_0(1+\eta) \qquad c = c_0(1+\eta) \qquad c = c_0(1-\varepsilon)$$

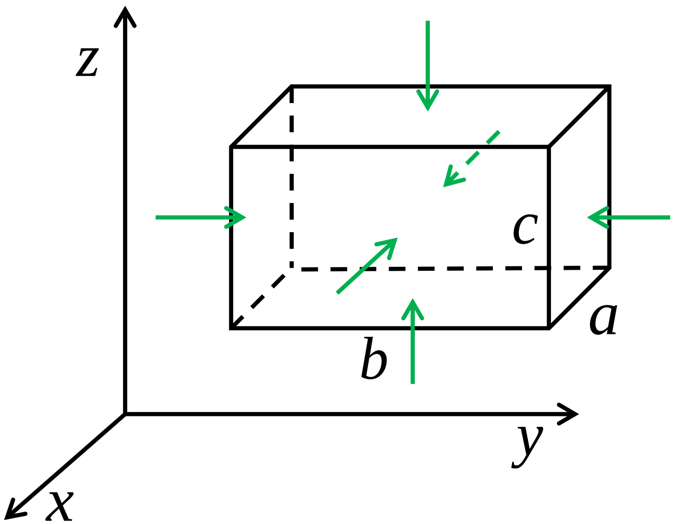
• Délka hran po deformaci tedy bude :

$$a = a_0(1-\varepsilon+2\eta), \quad b = b_0(1-\varepsilon+2\eta), \quad c = c_0(1-\varepsilon+2\eta)$$

• Objem kvádru po deformaci bude:

$$V = abc = a_0 b_0 c_0 (1-\varepsilon+2\eta)^3 \doteq V_0(1-3(\varepsilon-2\eta))$$

Mechanika kontinua – deformace pevných látek, Hookeův zákon



• Pro relativní změnu objemu dostáváme:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = -3(\varepsilon - 2\eta) \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -3\left(\frac{1}{E} - \frac{2}{\mu_P E}\right)\sigma_n = -\frac{3(\mu_P - 2)}{\mu_P E}\sigma_n$$

• **Objemovou stlačitelnost** můžeme definovat vztahem:

$$\gamma = -\frac{\Delta V}{V_0 \sigma_n} = \frac{3(\mu_P - 2)}{\mu_P E} = \frac{3(1 - 2\nu_P)}{E}$$

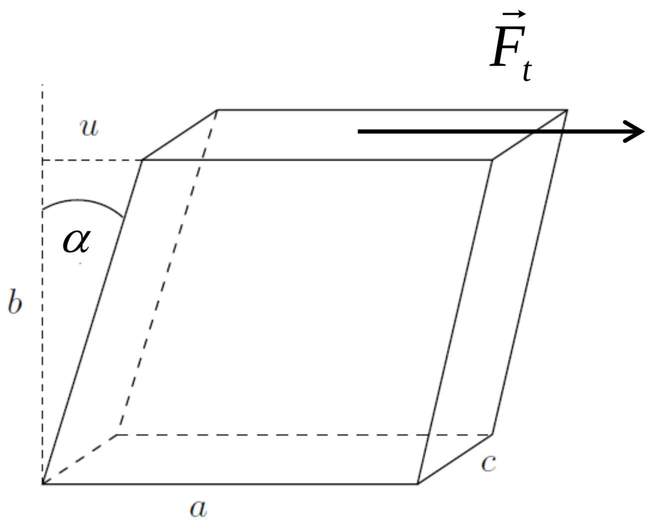
• **Objemový modul pružnosti** můžeme zavést vztahem :

$$K = \frac{1}{\gamma} = \frac{\mu_P E}{3(\mu_P - 2)} = \frac{E}{3(1 - 2\nu_P)} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \geq \nu_P \geq \tfrac{1}{2}$$

• Pokud je **Poisonovo číslo** rovné ½ těleso se chová jako nestlačitelné, protože:

$$\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta V = 0$$

Mechanika kontinua – deformace pevných látek, Hookeův zákon



• Deformace hranolu prostým smykem -tečná síla působí v rovině horní stěny hranolu o rozměrech *a*,*b*,*c* a způsobí posunutí horní stěny o *u* pro úhel smyku (smykovou deformaci) dostaneme:

$$\mathrm{tg}\alpha \doteq \alpha = \frac{u}{b}$$

• Tečné napětí působí v ploše velikosti *S*=*ac* a platí pro něj:

$$\sigma_t = \frac{F_t}{S} = \frac{F_t}{ac}$$

• Při smykové deformaci platí opět Hookeův zákon:

$$\alpha = k\sigma_t = \frac{1}{G}\sigma_t$$

• kde *k* je **součinitel posunutí** a *G* je **modul pružnosti ve smyku.**

Materiál	$E[Nm^{-2}]$ (Young)	ν_P (Poisson)	$\gamma[m^2N^{-1}]$ (stlačitelnost)	$G[Nm^{-2}]$ (smyk)
Hliník	$7,2.10^{10}$	0,34	$1,3.10^{-11}$	$2,7.10^{10}$
Měď	$1,2.10^{11}$	0,35	$7,1.10^{-12}$	$4,6.10^{10}$
Železo	$2,1.10^{11}$	0,28	$6,3.10^{-12}$	$7,8.10^{10}$

$$G = \frac{\mu_P E}{2(\mu_P + 1)} = \frac{E}{2(1+\nu_P)}$$

$$0 \geq \nu_P \geq \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \frac{E}{3} \leq G \leq \frac{E}{2}$$

Mechanika kontinua-deformace pevných látek, zobecněný Hookeův zákon

• Úkolem nauky o deformaci pevných látek je zjistit kvantitativní vztah mezi deformacemi a napětími, které v tělesech budí vnější síly.

• Předpoklad o přímé úměrnosti mezi napětím a deformací, známý z elementárního **Hookeova zákona** pro tah a smyk lze zobecnit a vyjádřit vztahem:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=x,y,z} \sum_{l=x,y,z} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j = x, y, z$$

• Koeficienty C_{ijkl} popisují vlastnosti studované látky a budeme jim říkat **elastické koeficienty**. Tyto koeficienty jsou složkami tenzoru 4. řádu a mají 3^4 tj. 81 složek. Vzhledem k tomu, že tenzory napětí a deformace jsou symetrické tenzory druhého řádu, uvážíme-li ještě krystalovou symetrii, potom se redukuje počet nezávislých složek na 21 v případě triklinické krystalové soustavy a na 3 v případě krychlové krystalové soustavy.

• Pro **izotropní těleso**, které má fyzikální vlastnosti stejné ve všech směrech, se počet nezávislých koeficientů redukuje na dva a **zobecněný Hookeův zákon** dostaneme ve tvaru:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_I + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad kde \quad \varepsilon_I = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad a \quad \delta_{ij} = 0\,(i \neq j), \delta_{ij} = 1\,(i = j)$$

kde λ a μ jsou **Laméovy koeficienty**. Jsou-li elastické vlastnosti látky popsané **Youngovým modulem** a **modulem pružnosti ve smyku** je zobecněný Hookeův zákon:

$$\sigma_{ij} = \frac{G(E-2G)}{3G-E} \delta_{ij} \varepsilon_I + 2G \varepsilon_{ij} \quad kde \quad \lambda = \frac{G(E-2G)}{3G-E} \quad a \quad \mu = G$$

Mechanika kontinua - pružnost

• Základní úlohou teorie pružnosti je najít napětí a deformaci v každém bodě tělesa, známe-li rozložení napětí, nebo deformaci na povrchu tělesa.

• Pro každý bod kontinua máme najít sl.ožky tenzoru napětí a složky vektoru posunutí, ktré vyhovují rovnicím rovnováhy kontinua:

$$\sum_{j=x,y,z} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} + G_i = 0, \quad i = x, y, z$$

a Hookeově zákonu:

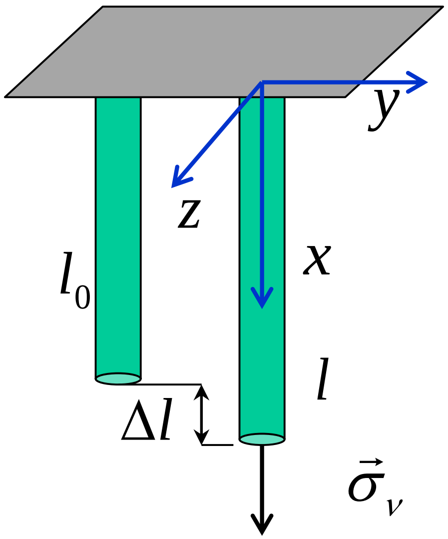
$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_I + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad kde \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right)$$

• Známe-li vektory napětí na povrchu tělesa, můžeme při stanovení počátečních podmínek vyjít z rovnice:

$$\vec{\sigma}_\nu = \vec{\vec{\sigma}} \vec{\nu}, \quad tedy \quad \sigma_{\nu i} = \sum_{j=x,y,z} \sigma_{ij} \nu_j, \quad kde \quad i = x, y, z$$

Která musí být splněna v bodech na povrchu tělesa.

Mechanika kontinua – pružnost - tah



• Při vyšetřování tahu můžeme zanedbat působení vlastní tíhy vzorku, objemová síla je tedy nulová.

$$G_i = 0, \quad i = x, y, z$$

• Rovnici rovnováhy můžeme splnit, pokládáme-li složky tenzoru napětí za konstantní v celém objemu vzorku:

$$\sigma_{ij}(x) = \sigma_{ij} = konst \Rightarrow \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} = 0$$

•Vektor napětí na spodní, horní ploše vzorku má složky:

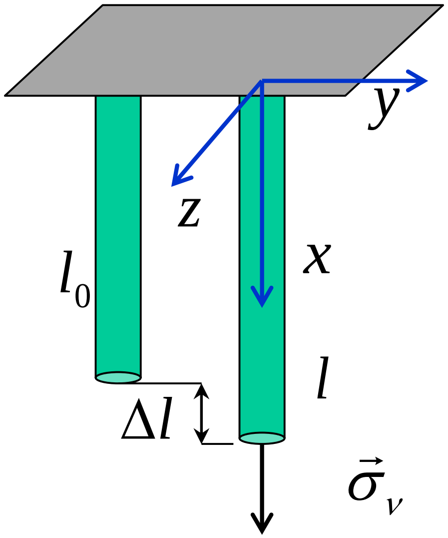
$$\vec{\sigma}_\nu = \left(\frac{F}{S}, 0, 0\right), \quad \vec{\sigma}_\nu = \left(-\frac{F}{S}, 0, 0\right)$$

• Okrajové podmínky na spodní a horní podstavě vzorku:

$$\sigma_{\nu i} = \sum_{j=x,y,z} \sigma_{ij}\nu_j \quad pro \quad \nu = (1, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad \sigma_{xx} = \frac{F}{S}, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0$$

$$pro \quad \nu = (-1, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad \sigma_{xx} = \frac{F}{S}, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0$$

Mechanika kontinua – pružnost - tah



•Vektor napětí má na válcové ploše vzorku nulovou hodnotu:

$$\vec{\sigma}_v = (0, 0, 0)$$

• Okrajové podmínky na válcové ploše vzorku(předpokládáme, že složky tenzoru napětí jsou konstantní v celém vzorku):

$$\sigma_{vi} = \sum_{j=x,y,z} \sigma_{ij} v_j \quad pro \quad \vec{v} = (0, v_y, v_z)$$

$$\Rightarrow 0 = \sigma_{yy} v_y + \sigma_{zy} v_z, \quad 0 = \sigma_{yz} v_y + \sigma_{zz} v_z$$

$$\Rightarrow \sigma_{yy} = 0, \sigma_{zy} = 0, \sigma_{zz} = 0$$

• Hodnoty složek napětí dosadíme do Hookeova zákona:

$$\frac{F}{S} = \sigma_{xx} = \lambda \varepsilon_I + 2\mu\varepsilon_{xx}$$

$$0 = \lambda\varepsilon_I + 2\mu\varepsilon_{yy}, 0 = \lambda\varepsilon_I + 2\mu\varepsilon_{zz} \Rightarrow \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}$$

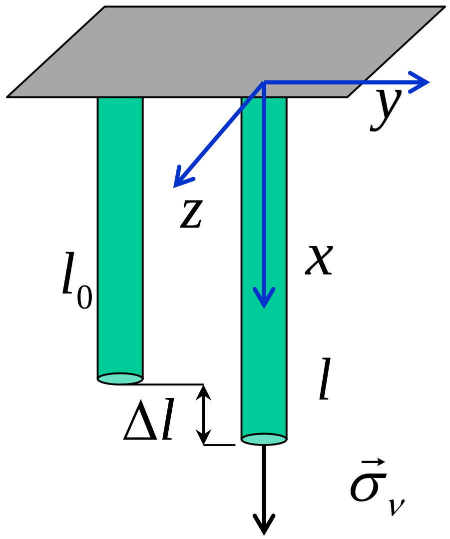
$$\varepsilon_I = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \Rightarrow \quad \varepsilon_{yy} = \frac{-\lambda}{2(\lambda+\mu)}\varepsilon_{xx}$$

$$0 = 2\mu\varepsilon_{xy}, 0 = 2\mu\varepsilon_{xz}, 0 = 2\mu\varepsilon_{yz} \Rightarrow \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\varepsilon_{xx}$$

$$\frac{F}{S} = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\varepsilon_{xx}$$

Mechanika kontinua – pružnost - tah



•Ve výsledku tedy:

$$\frac{F}{S} = \sigma_{xx} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}\varepsilon_{xx} = E\varepsilon_{xx} = E\frac{\Delta l}{l}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

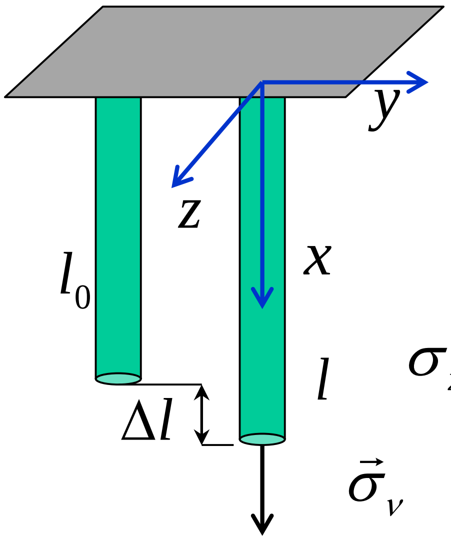
• Pro homogenní deformaci, kdy jsou složky vektoru posunutí přímo úměrné souřadnicím:

$$u_x = \varepsilon_{xx}x + \varepsilon_{xy}y + \varepsilon_{xz}z$$
$$u_y = \varepsilon_{yx}x + \varepsilon_{yy}y + \varepsilon_{yz}z$$
$$u_z = \varepsilon_{zx}x + \varepsilon_{zy}y + \varepsilon_{zz}z$$

• Dostáváme pro vektor posunutí:

$$u_x = \varepsilon_{xx}x = \frac{\sigma_{xx}}{E}x$$
$$u_y = \varepsilon_{yy}y$$
$$u_z = \varepsilon_{zz}z$$

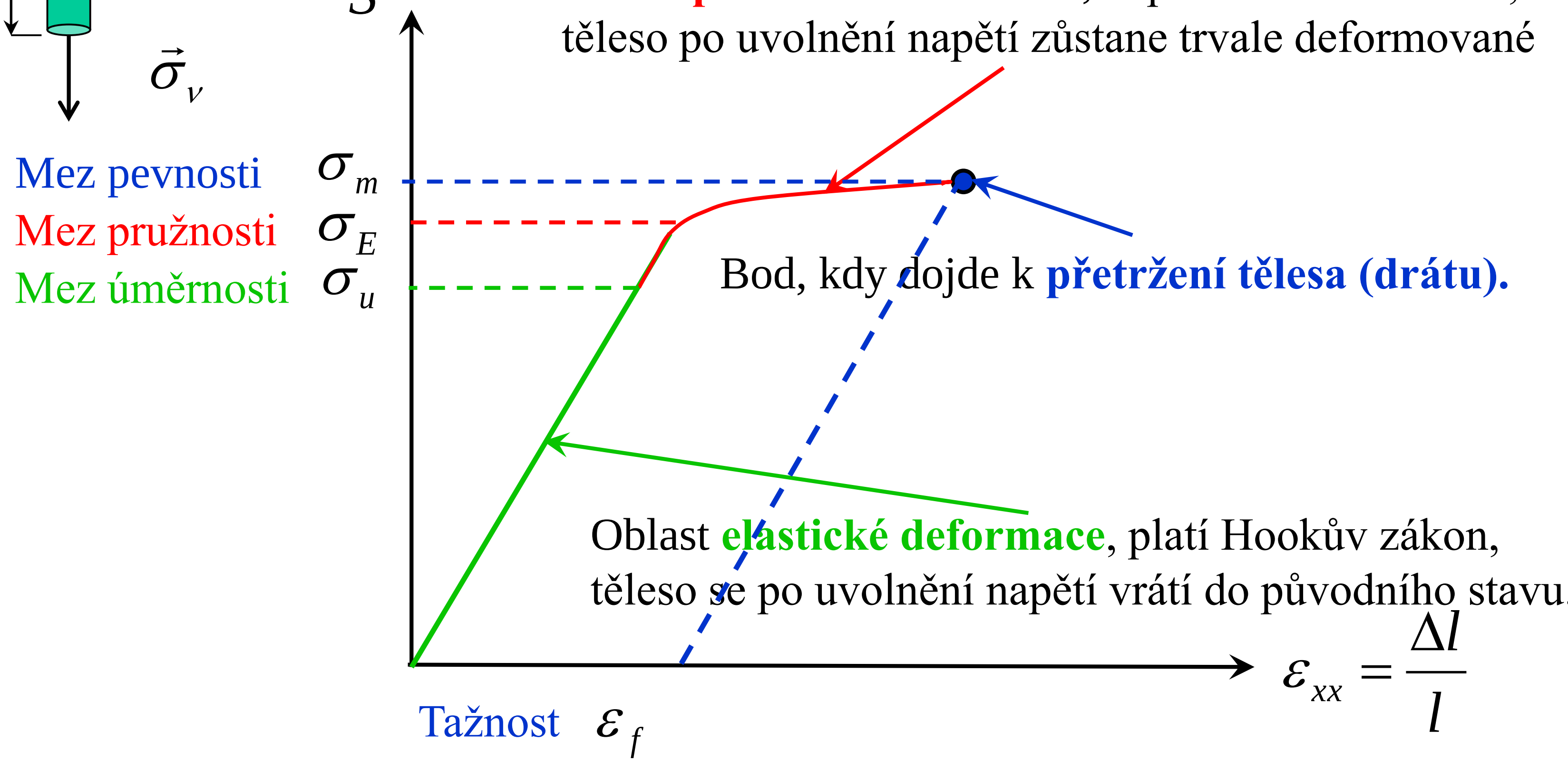
Mechanika kontinua – pružnost – tah, meze platnosti Hookova zákona



- Hookův zákon – lineární závislost napětí na relativním prodloužení:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{S}$$



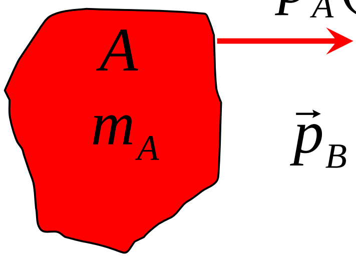
Ráz těles, pružný a nepružný

- Pohybový stav těles v izolované soustavě se mění s časem a může docházet ke kolizím (srážkám) těles.

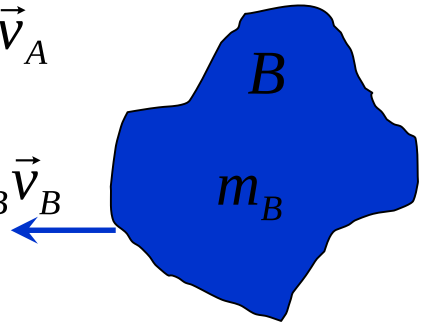
Disipatiní energie: $E_D(\Delta t)$

$t = t_0$

$\vec{p}_A(t_0) = m_A \vec{v}_A$

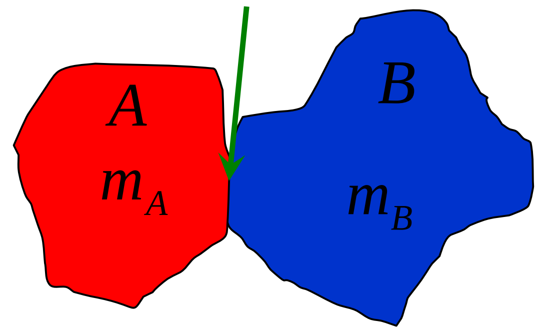


$\vec{p}_B(t_0) = m_B \vec{v}_B$



$t = t_1$

$\Delta t = t_2 - t_1$



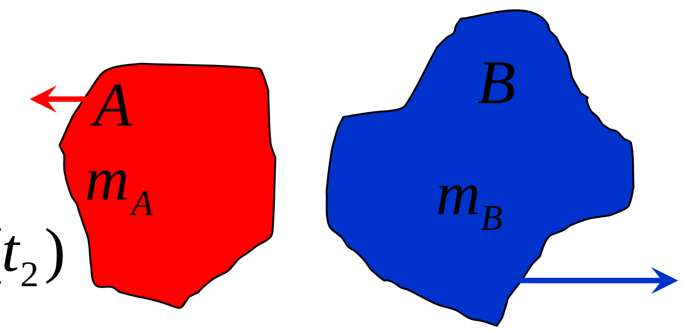
$t = t_2$

- Celková hybnost soustavy:

$$\vec{p}(t_0) = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B$$

- Celková kinetická energie soustavy:

$$E_K(t_0) = \tfrac{1}{2} m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2} m_B v_B^2$$



$\vec{p}_A(t_2) = m_A \vec{v}_A(t_2)$

$\vec{p}_B(t_2) = m_B \vec{v}_B(t_2)$

- Celková hybnost soustavy:

$$\vec{p}(t_2) = \vec{p}_A(t_2) + \vec{p}_B(t_2)$$

- Celková energie soustavy:

$$E_K(t_2) - E_D(\Delta t) = E_{KA}(t_2) + E_{KB}(t_2)$$

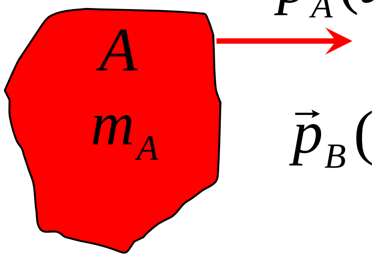
$E_D(t_2) = 0$ **- Dokonale pružný ráz**

$E_D(t_2) \neq 0$ **- Nepružný ráz**

Ráz těles, pružný a nepružný

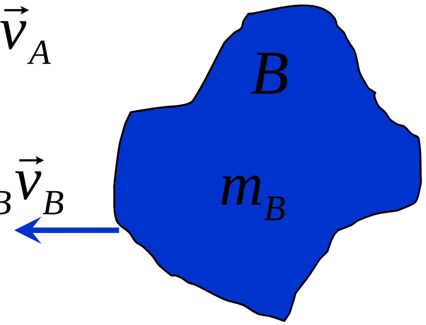
• Pohybový stav těles v izolované soustavě se mění s časem a může docházet ke kolizím (srážkám) těles.

$t = t_0$



$\vec{p}_A(t_0) = m_A \vec{v}_A$

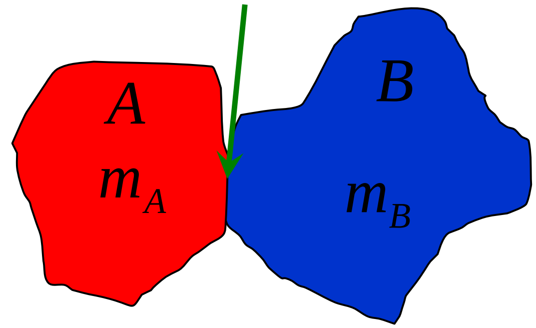
$\vec{p}_B(t_0) = m_B \vec{v}_B$



Disipatiní energie: $E_D(\Delta t)$

$t = t_1$

$\Delta t = t_2 - t_1$



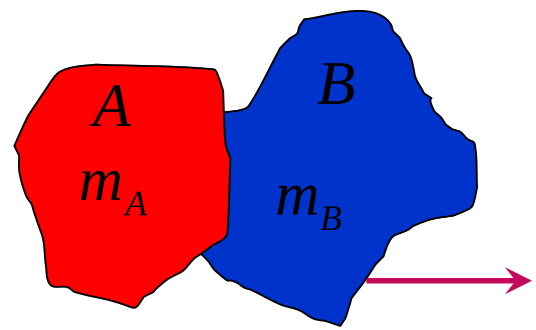
$t = t_2$

• Celková hybnost soustavy:

$$\vec{p}(t_0) = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B$$

• Celková kinetická energie soustavy:

$$E_K(t_0) = \tfrac{1}{2} m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2} m_B v_B^2$$



$M = m_A + m_B$

$\vec{p}_{AB}(t_2) = M \vec{v}_{AB}(t_2)$

• Celková hybnost soustavy:

$$\vec{p}(t_2) = \vec{p}_{AB}(t_2) = M \vec{v}_{AB}(t_2)$$

• Celková energie soustavy:

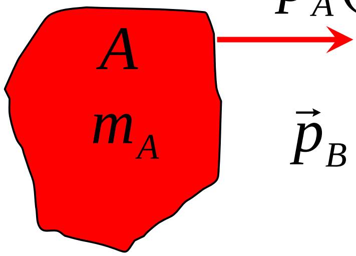
$$E_K(t_2) - E_D(\Delta t) = E_{KAB}(t_2) = \tfrac{1}{2} M v_{AB}^2$$

$E_D(t_2) \neq 0$ **- Dokonale nepružný ráz**

Dokonale nepružný ráz těles

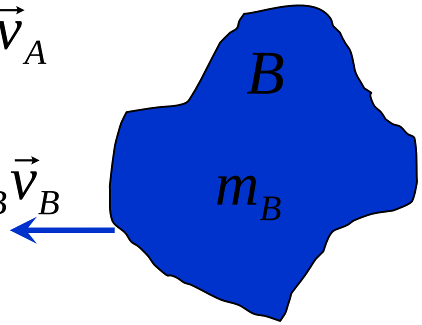
Dokonale nepružný ráz $E_D(t_2) \neq 0$

$t = t_0$

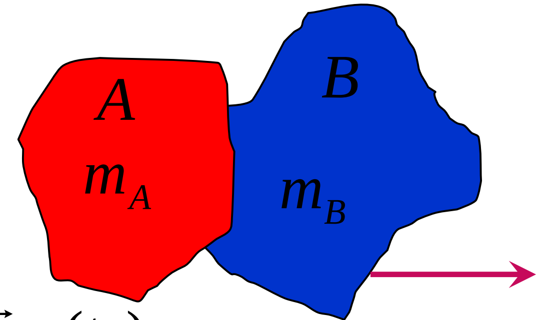


$\vec{p}_A(t_0) = m_A \vec{v}_A$

$\vec{p}_B(t_0) = m_B \vec{v}_B$



$t = t_2$



$M = m_A + m_B$

$\vec{p}_{AB}(t_2) = M\vec{v}_{AB}(t_2)$

- Celková hybnost soustavy:

$$\vec{p}(t_0) = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B$$

- Celková kinetická energie soustavy:

$$E_K(t_0) = \tfrac{1}{2} m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2} m_B v_B^2$$

- Celková hybnost soustavy:

$$\vec{p}(t_2) = \vec{p}_{AB}(t_2) = M\vec{v}_{AB}(t_2)$$

- Celková energie soustavy:

$$E_K(t_2) - E_D(\Delta t) = E_{KAB}(t_2) = \tfrac{1}{2} M v_{AB}^2$$

- Předpokládejme, že se tělesa pohybují proti sobě ve směru spojnice mezi jejich hmotnými středy, potom ze zákona zachování hybnosti dostaneme:

$$p(t_0) = p(t_2) \Rightarrow m_A v_A + m_B v_B = M v_{AB}(t_2)$$

$$v_B = 0$$

$$v_{AB}(t_2) = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B}$$

$$v_{AB}(t_2) = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_A$$

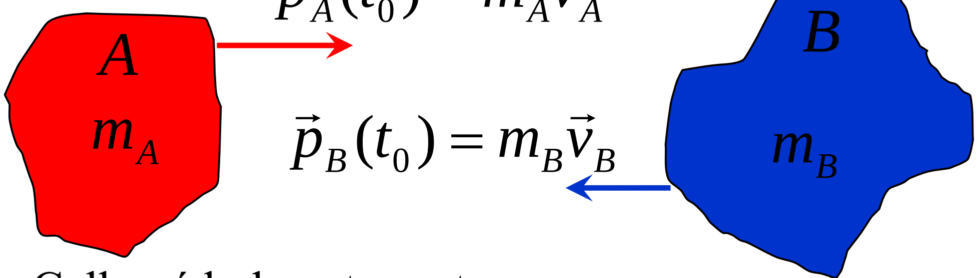
Dokonale pružný ráz těles

Dokonale pružný ráz $E_D(t_2) = 0$

$t = t_0$

$\vec{p}_A(t_0) = m_A \vec{v}_A$

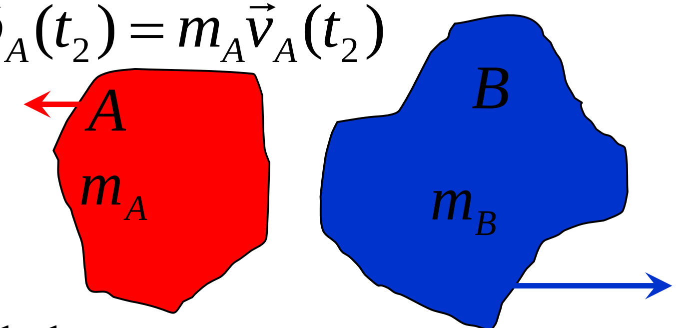
$\vec{p}_B(t_0) = m_B \vec{v}_B$



$t = t_2$

$\vec{p}_B(t_2) = m_B \vec{v}_B(t_2)$

$\vec{p}_A(t_2) = m_A \vec{v}_A(t_2)$



- Celková hybnost soustavy:

$$\vec{p}(t_0) = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B$$

- Celková kinetická energie soustavy:

$$E_K(t_0) = \tfrac{1}{2} m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2} m_B v_B^2$$

- Celková hybnost soustavy:

$$\vec{p}(t_2) = \vec{p}_A(t_2) + \vec{p}_B(t_2)$$

- Celková energie soustavy:

$$E_K(t_2) = E_{KA}(t_2) + E_{KB}(t_2)$$

- Předpokládejme, že se tělesa pohybují proti sobě ve směru spojnice mezi jejich hmotnými středy, potom ze zákona zachování hybnosti a energie dostaneme:

$$m_A v_A + m_B v_B = +m_A v_A(t_2) + m_B v_B(t_2) \quad \Rightarrow \quad m_A\big(v_A - v_A(t_2)\big) = -m_B\big(v_B - v_B(t_2)\big)$$

$$\tfrac{1}{2} m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2} m_B v_B^2 = \tfrac{1}{2} m_A v_A^2(t_2) + \tfrac{1}{2} m_B v_B^2(t_2) \quad \Rightarrow \quad m_A\big(v_A^2 - v_A^2(t_2)\big) = -m_B\big(v_B^2 - v_B^2(t_2)\big)$$

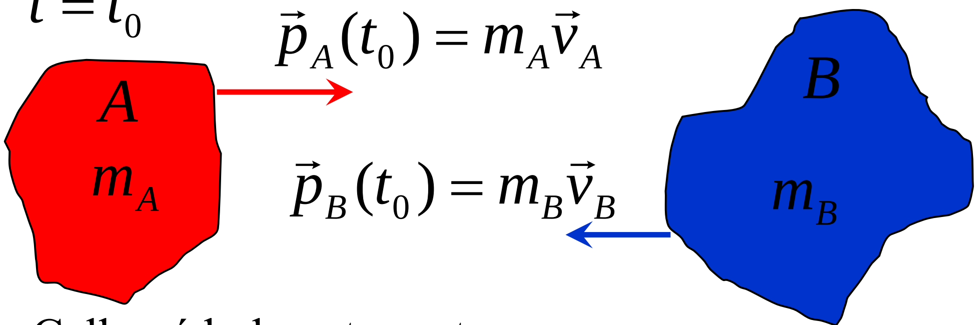
Dokonale pružný ráz těles

Dokonale pružný ráz $E_D(t_2)=0$

$t=t_0$

$\vec{p}_A(t_0)=m_A\vec{v}_A$

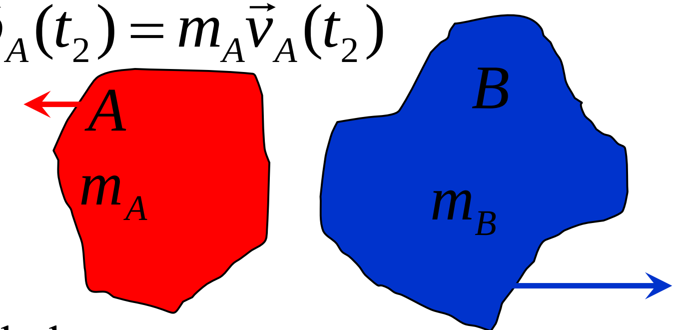
$\vec{p}_B(t_0)=m_B\vec{v}_B$



$t=t_2$

$\vec{p}_B(t_2)=m_B\vec{v}_B(t_2)$

$\vec{p}_A(t_2)=m_A\vec{v}_A(t_2)$



- Celková hybnost soustavy:

$$\vec{p}(t_0)=m_A\vec{v}_A+m_B\vec{v}_B$$

- Celková kinetická energie soustavy:

$$E_K(t_0)=\tfrac{1}{2}m_Av_A^2+\tfrac{1}{2}m_Bv_B^2$$

- Relativní rychlosti se před a po srážce zachovávají, jenom jsou opačně orientované:

$$v_A+v_A(t_2)=v_B+v_B(t_2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_A(t_2)-v_B(t_2)=-(v_A-v_B)$$

- Celková hybnost soustavy:

$$\vec{p}(t_2)=\vec{p}_A(t_2)+\vec{p}_B(t_2)$$

- Celková energie soustavy:

$$E_K(t_2)=E_{KA}(t_2)+E_{KB}(t_2)$$

$$v_B=0$$

$$m_Av_A=m_Av_A(t_2)+m_Bv_B(t_2)$$

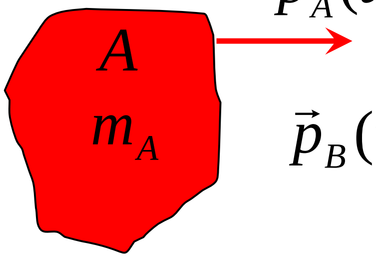
$$v_B(t_2)=v_A+v_A(t_2)$$

Dokonale pružný ráz těles

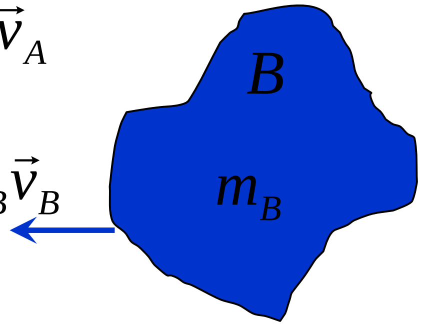
Dokonale pružný ráz $E_D(t_2)=0$

$t=t_0$

$\vec{p}_A(t_0)=m_A\vec{v}_A$



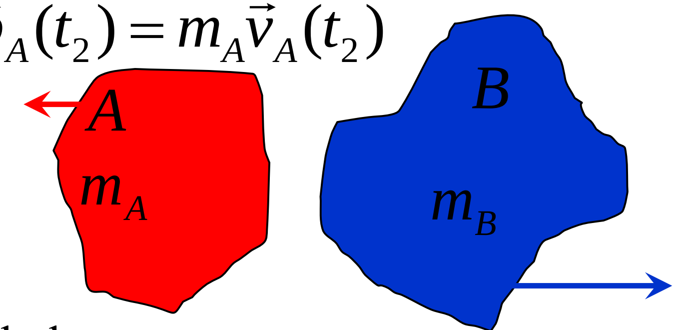
$\vec{p}_B(t_0)=m_B\vec{v}_B$



$t=t_2$

$\vec{p}_A(t_2)=m_A\vec{v}_A(t_2)$

$\vec{p}_B(t_2)=m_B\vec{v}_B(t_2)$



- Celková hybnost soustavy:

$$\vec{p}(t_0)=m_A\vec{v}_A+m_B\vec{v}_B$$

- Celková kinetická energie soustavy:

$$E_K(t_0)=\tfrac{1}{2}m_Av_A^2+\tfrac{1}{2}m_Bv_B^2$$

- Celková hybnost soustavy:

$$\vec{p}(t_2)=\vec{p}_A(t_2)+\vec{p}_B(t_2)$$

- Celková energie soustavy:

$$E_K(t_2)=E_{KA}(t_2)+E_{KB}(t_2)$$

$$v_A(t_2)=v_A\frac{m_A-m_B}{m_A+m_B}$$

$$v_B(t_2)=v_A\frac{2m_A}{m_A+m_B}$$

$v_B=0$

1) $m_A=m_B \Rightarrow v_A(t_2)=0,\ v_B(t_2)=v_A$

2) $m_A<<m_B \Rightarrow v_A(t_2)\cong -v_A,\ v_B(t_2)\cong 0$

3) $m_A>>m_B \Rightarrow v_A(t_2)\cong v_A,\ v_B(t_2)\cong 2v_A$